

16. EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

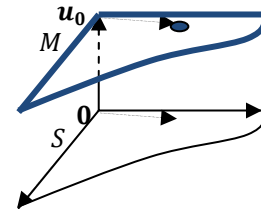
16.1. VARIEDADES AFINES VS SUBESPACIOS VECTORIALES

Dado un vector $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ y un subespacio vectorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se llama **variedad afín que pasa por \mathbf{u}_0 con la dirección de S** al conjunto de vectores M que se obtiene como suma de \mathbf{u}_0 con cualquier vector de S :

$$M = \mathbf{u}_0 + S = \{\mathbf{u}_0 + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in S\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Los elementos de una variedad afín reciben el nombre de **puntos**.

El subespacio vectorial S se llama **espacio de direcciones** de la variedad afín $M = \mathbf{u}_0 + S$



Dos **variedades afines** de \mathbb{R}^n se dice que **son paralelas** si el espacio de direcciones de una de ellas está contenido en el espacio de direcciones de la otra:

$$M_1 = \mathbf{u}_1 + S_1 \subseteq \mathbb{R}^n, M_2 = \mathbf{u}_2 + S_2 \subseteq \mathbb{R}^n \text{ } M_1 \text{ y } M_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow S_1 \subseteq S_2 \text{ o } S_2 \subseteq S_1.$$

16.1.1. CUÁNDO UNA VARIEDAD AFÍN ES UN SUBESPACIO VECTORIAL

Una variedad afín $M = \mathbf{u}_0 + S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathbf{u}_0 \in S$, en cuyo caso es

$$M = S$$

Demostración:

“ \Rightarrow ” Se supone que la variedad afín $M = \mathbf{u}_0 + S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial. Se trata de demostrar que en ese caso es $\mathbf{u}_0 \in S$ y $M = S$.

Si M es subespacio vectorial entonces $\mathbf{0} \in M \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \in S \Rightarrow \mathbf{v} = -\mathbf{u}_0 \in S$ y S es subespacio vectorial $\Rightarrow -\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 \in S$.

Además, en este caso, si $\mathbf{p} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v} \in M \Rightarrow \mathbf{v} \in S$ y S es subespacio vectorial $\Rightarrow \mathbf{p} \in S$

Por otro lado, si $\mathbf{w} \in S$, por ser $\mathbf{u}_0 \in S$ y S un subespacio vectorial, se tiene que $\mathbf{w} - \mathbf{u}_0 \in S$, por tanto $\mathbf{w} = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{w} - \mathbf{u}_0) \in M$. Por tanto se tiene que $M = S$

“ \Leftarrow ” Se supone que $\mathbf{u}_0 \in S$. Se trata de demostrar que en ese caso la variedad afín $M = \mathbf{u}_0 + S$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .

Por ser S subespacio vectorial y $\mathbf{u}_0 \in S \Rightarrow -\mathbf{u}_0 \in S$ por tanto $\mathbf{0} = \mathbf{u}_0 + (-\mathbf{u}_0) \in M$ y $M \neq \emptyset$

Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S$, \Rightarrow

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{v} + \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) \in \mathbf{u}_0 + S = M$$

Sean $\mathbf{p} \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \in S$, \Rightarrow

$$\alpha \mathbf{p} = \alpha \mathbf{u}_0 + \alpha \mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + (\alpha \mathbf{u}_0 + \alpha \mathbf{v} - \mathbf{u}_0) \in \mathbf{u}_0 + S = M$$

De donde se deduce que M es un subespacio vectorial.

16.1.2. DIMENSIÓN DE UNA VARIEDAD AFÍN

Sean $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $S \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacio vectorial. Se llama **dimensión de la variedad afín** $M = \mathbf{u}_0 + S$ a la dimensión de su espacio de direcciones:

$$\dim(M) = \dim(S)$$

Y se tiene que:

- Las variedades afines de \mathbb{R}^n , de dimensión 0, son los **puntos**.
- Las variedades afines de \mathbb{R}^n , de dimensión 1, denominan **rectas**.
- Las variedades afines de \mathbb{R}^n , de dimensión 2, se denominan **planos**.
- Para $n > 3$, las variedades afines de \mathbb{R}^n , de dimensión $n - 1$, se denominan **hiperplanos**.

16.2. PUNTOS VS VECTORES

Aunque no toda variedad afín es un espacio vectorial, cualquier espacio o subespacio vectorial se puede considerar como una variedad afín. En particular \mathbb{R}^n es una variedad afín.

Se llama **espacio afín euclídeo** \mathbb{R}^n a la única variedad afín cuyo espacio de direcciones es todo \mathbb{R}^n .

Se tiene por tanto que \mathbb{R}^n puede ser considerado como espacio afín euclídeo o como espacio vectorial y sus elementos recibirán el nombre de puntos o de vectores, según se esté considerando una u otra estructura en \mathbb{R}^n .

16.2.1. OBTENCIÓN DE VECTORES A PARTIR DE PUNTOS

Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad afín, la diferencia de cualquier par de puntos de M da como resultado un vector perteneciente al subespacio de direcciones de M .

Demostración:

Sea $M = \mathbf{u}_0 + S$ y sean $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}, \text{ con } \mathbf{v} \in S \\ \mathbf{q} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}, \text{ con } \mathbf{w} \in S \end{cases} \Rightarrow$

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} = (\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) = \mathbf{v} - \mathbf{w} \in S$$

NOTACIÓN

El vector resultado de la diferencia de los dos puntos \mathbf{p} y \mathbf{q} suele notarse como:

$$\overrightarrow{qp} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$$

EJEMPLO 1

Determinar unas ecuaciones implícitas del espacio de direcciones del plano de \mathbb{R}^3 que contiene a los puntos

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$$

$$\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_1} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S$$

Se tienen dos vectores linealmente independientes de S . Dado que S tiene dimensión 2 constituyen una base de S :

$$\mathbf{x} \in S \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = 2\beta \end{cases}$$

Las ecuaciones obtenidas son unas ecuaciones paramétricas. Para obtener unas ecuaciones implícitas se eliminan parámetros. La ecuación pedida es:

$$x_1 = 0$$

16.3. ECUACIONES DE UNA VARIEDAD AFÍN

Todo sistema de ecuaciones lineales compatible $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ representa una variedad afín. Dicho sistema se denomina **ecuaciones implícitas** de la variedad y las soluciones del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ proporcionan su espacio de direcciones.

Al resolver el sistema se obtienen las componentes de los puntos en función de ciertos parámetros, dicha expresión se denomina **ecuaciones paramétricas** de la variedad.

EJEMPLO 2

Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta que pasa por $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con la dirección

$S = \mathcal{L}\left\{\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Comprobar si la recta obtenida es un subespacio vectorial.

Solución

$$M = \mathbf{u}_0 + S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \lambda \\ x_2 = -1 + \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

son las ecuaciones paramétricas de la recta.

Para obtener las ecuaciones implícitas, se eliminan parámetros en estas ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

La recta obtenida no es un subespacio vectorial, pues no contiene al vector $\mathbf{0}$.

EJEMPLO 3

Determinar la dimensión y el subespacio de direcciones de la variedad afín cuyas ecuaciones implícitas

son:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se resuelve el sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[x_4=\mu]{x_2=\lambda} \begin{cases} x_1 = 1 - \lambda + \mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -1 - \mu \\ x_4 = \mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego la variedad afín es $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S$, siendo el subespacio de direcciones:

$$S = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Y se tiene que $\dim(M) = 2$, por tanto se trata de un plano.